
УДК 082

ББК 94

Z 40

Wydawca: Sp. z o.o. «Diamond trading tour»

Druk I oprawa: Sp. z o.o. «Diamond trading tour»

Adres wydawcy I redakcji: Warszawa, ul. Wyszogrodzka, 16
e-mail: info@conferenc.pl

Cena (zł.): bezpłatnie

Zbiór raportów naukowych.

Z 40 Zbiór raportów naukowych. „Nauka I Utworzenie XXI Stulecia : Teoria, Praktyka, Innowacje„. (29.11.2013 - 30.11.2013) - Opole: Wydawca: Sp. z o.o. «Diamond trading tour», 2013. - 124 str.
ISBN: 978-83-63620-19-6 (t.7)

Zbiór raportów naukowych. Wykonane na materiałach Międzynarodowej Naukowo-Praktycznej Konferencji 29.11.2013 - 30.11.2013 roku. Opole.
Część 7.

УДК 082
ББК 94

Wszelkie prawa zastrzeżone.

Powielanie i kopiowanie materiałów bez zgody autora zakazany.

Wszelkie prawa do materiałów konferencji należą do ich autorów.

Pisownia oryginalna jest zachowana.

Wszelkie prawa do materiałów w formie elektronicznej opublikowanych w zbiorach należą Sp. z o.o. «Diamond trading tour».

Obowiązkowa odniesienia do zbioru.

ISBN: 978-83-63620-19-6 (t.7)

"Diamond trading tour" ©

СЕКЦЈА 19. TRANSPORTU.(ТРАНСПОРТ)

24. Пірогова Г.В.....	88
«НЕЙПРОМЕРЕЖЕВА МОДЕЛЬ ОБРОБКИ БОРТОВИХ СИГНАЛІВ ЛІТАКІВ»	

СЕКЦЈА 21. FIZYKI I MATEMATYKI.
(ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ)

25. Овсиенко А.В.	92
МУЛЬТИМЕДІА-ТЕХНОЛОГІЇ - КАК ФАКТОР РАЗВИТІЯ САМОСТЯТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ	
26. Кульбаева Т.Ф.	95
ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ РИМАНА-АДАМАРА ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ.	
27. Мишкина М.П.	98
ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ РИМАНА-АДАМАРА ПРИ ОБРАЩЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	
28. Орлова А.О.	102
ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ	
29. Доровская М.С.	106
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНЖЕКЦИИ ГАЗА В ПЛАСТ, ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫЙ ВОДОЙ	
30. Белошайпка А.О., Белошайпка О.Я.....	108
ДІЯ АБРАЗИВНИХ ЧАСТОК НА ПОВЕРХНЮ МОНОКРИСТАЛА У ПРОЦЕСІ ХІМІКО-МЕХАНІЧНОГО ПОЛІРУВАННЯ	
31. Доровская М.С.	114
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗЛОЖЕНИЯ ГАЗОГИДРАТА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ	

СЕКЦЈА 24. NAUKI CHEMICZNE.(ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ)

32. Бахматов М. Л.....	116
ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ МОДИФИКАТОРОВ И ПРИСАДОК К ДОРОЖНЫМ БИТУМАМ И ВЛИЯНИЕ ИХ НА СВОЙСТВА АСФАЛЬТОБЕТОНА	
33. Звонарева Т. А.....	119
ТЕХНОЛОГИЯ ДОРОЖНОГО ЦЕМЕНТНОГО БЕТОНА С ДИСПЕРСНЫМ БИТУМОМ	



**SEKCJA 21. FIZYKI I MATEMATYKI.
(ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ)**

ПОД- СЕКЦИЯ 3. Информатика.

Овсиенко А.В.

Преподаватель кафедры математики, информатики
Филиал СГПИ в г. Ессентуки

**МУЛЬТИМЕДИА-ТЕХНОЛОГИИ – КАК ФАКТОР РАЗВИТИЯ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ**

В последние годы заметно возрос интерес к самостоятельной работе учащихся. Внедрение самостоятельных работ в учебный процесс требует разработки новых технологий обучения и современных средств обучения.

С развитием информационных технологий все больше внимания уделяется возможностям, предоставляемым компьютером для разработки компьютерных технологий обучения. Особенно богатыми дидактическими возможностями, обладает технология мультимедиа, представляющая собой интерактивное объединение текста, графики, звука, видео и анимации на основе единого интерактивного программного обеспечения.

Мультимедиа технологии успешно применяются в настоящее время в сфере образования и профессиональной подготовки, в издательской деятельности (электронные книги), для компьютеризации бизнеса (реклама, обслуживание клиентов), в информационных центрах (библиотеки, музеи) и т.д. Одно из самых широких областей применения технология мультимедиа получила в сфере образования, поскольку средства информатизации, основанные на мультимедиа способны, в ряде случаев, существенно повысить эффективность обучения. Экспериментально установлено, что при устном изложении материала обучаемый за минуту воспринимает и способен переработать до одной тысячи условных единиц информации, а при «подключении» органов зрения до 100 тысяч таких единиц [2, с.36].

Мультимедиа – это:

- технология, описывающая порядок разработки, функционирования и применения средств обработки информации разных типов;
- особый обобщающий вид информации, которая объединяет в себе как традиционную статическую визуальную (текст, графику), так и динамическую информацию разных типов (речь, музыку, видео фрагменты, анимацию и т.п.).

В условиях информационного общества и информатизации образования самостоятельное непрерывное пополнение знаний и их применение становится потребностью человека на протяжении всей его жизни. Поэтому при обсуждении дидактических и методических аспектов использования компьютера и мультимедиа-ресурсов в общем среднем образовании основной упор делается на организацию самостоятельной познавательной (индивидуальной и/или групповой) деятельности учащихся, развитие критического мышления, культуры общения, умения выполнять различные социальные роли.

Методика использования мультимедиа технологий предполагает:

1. совершенствование системы управления обучением на различных этапах урока;
2. усиление мотивации учения;
3. улучшение качества обучения и воспитания, что повысит информационную культуру учащихся;
4. демонстрацию возможностей компьютера, не только как средства для игры [1, с.14].

Мультимедийные уроки помогают решить следующие дидактические задачи:

- усвоить базовые знания по предмету;
- систематизировать усвоенные знания;
- сформировать навыки самоконтроля;
- сформировать мотивацию к учению в целом и к информатике в частности;
- оказать методическую помощь учащимся в самостоятельной работе на учебном материале.

Данную технологию можно рассматривать как объяснительно-иллюстративный метод обучения, основным назначением которого является организация усвоения учащимися информации путем сообщения учебного материала и обеспечение его успешного восприятия, которое усиливается при подключении зрительной памяти. Известно, (исследования института «Евролингвист», Голландия), что большинство людей запоминает 5% услышанного и 20% увиденного. Одновременное использование аудио- и видеоинформации повышает запоминаемость до 40%-50%. Мультимедиа программы представляют информацию в различных формах и тем самым делают процесс обучения более эффективным.

При использовании на уроке мультимедийных технологий структура урока принципиально не изменяется. В нем по-прежнему сохраняются все основные этапы, изменятся, возможно, только их временные характеристики.

Учащихся привлекает новизна проведения мультимедийных уроков. Во время таких уроков создаётся обстановка реального общения, при которой учащиеся стремятся выразить мысли «своими словами», они с желанием выполняют задания, проявляют интерес к изучаемому материалу, у них пропадает страх перед компьютером, они учатся самостоятельно работать с учебной, справочной и другой литературой по предмету. У учащихся появляется заинтересованность в получении более высокого результата, готовность и желание выполнять дополнительные задания. При выполнении практических действий проявляется самоконтроль.

Необходимо отметить, что этап мотивации в данном случае увеличивается и несет познавательную нагрузку. Это необходимое условие успешности обучения, так как без интереса к пополнению недостающих знаний, без воображения и эмоций немислима творческая деятельность ученика [3, с.41].

Структурная компоновка мультимедийной презентации, с применением гипертекстовых ссылок развивает системное, аналитическое мышление. Кроме того, с помощью презентации можно использовать разнообразные формы организации познавательной деятельности: фронтальную, групповую, индивидуальную.

Целесообразность применения мультимедиа в образовании можно проиллюстрировать многими примерами. Как правило, презентации, сопровождаемые красивыми изображениями или анимацией, являются визуально более привлека-

тельными, нежели статический текст, и они могут поддерживать должный эмоциональный уровень, дополняющий представляемый материал, способствуя повышению эффективности обучения.

Использование мультимедиа позволяет продемонстрировать ученикам ряд опытов по физике или химии, выполнение которых невозможно в системе среднего профессионального образования.

С помощью мультимедиа можно «переместиться в пространстве» и показать учащимся изучаемые в курсе истории экспонаты музеев или памятники археологии, не покидая аудитории.

Использование мультимедиа позволяет обучаемым работать с учебными материалами по-разному – учащийся сам решает, как изучать материалы, как применять интерактивные возможности средств информатизации, и как реализовать совместную работу со своими соучениками. Таким образом, учащиеся становятся активными участниками образовательного процесса.

Работая с мультимедиа-средствами, учащиеся могут влиять на свой собственный процесс обучения, подстраивая его под свои индивидуальные способности и предпочтения. Они изучают именно тот материал, который их интересует, повторяют изучение столько раз, сколько им нужно, что способствует более правильному восприятию [3, с.54].

Мультимедийные средства в обучении имеют ряд преимуществ по сравнению с традиционными печатными учебниками и учебными пособиями:

– предоставление – возможности индивидуализации учебного процесса, приспособление его к индивидуальным особенностям учащихся;

– повышение наглядности представления– материала с помощью нескольких воспринимаемых человеком сред;

–повышение– активизации познавательной деятельности учащихся, благодаря интерактивности;

–усиление контролирующей функции учебного курса за счет использования– встроенных тестов разного уровня, облегчающих деятельность учителя и создающих эффективную обратную связь.

Таким образом, применение технологии мультимедиа в образовательном процессе значительно повышает заинтересованность и мотивацию деятельности учащихся, а также уровень усвоения учащимися необходимых знаний и умений, так как требует от них активизации самостоятельной познавательной деятельности.

Литература:

1. Клемешова Н.В. Мультимедиа как дидактическое средство высшей школы//Автореф. дисс. канд. пед. наук – Калининград, 1999.
2. Захарова И.Г. Информационные технологии в образовании: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 192 с.
3. Егорова Ю.Н. Мультимедиа как средство повышения эффективности обучения в общеобразовательной школе – Чебоксары, 2000.

Кульбаева Т.Ф .

студентка,

Стерлитамак. фил. БашГУ,

г.Стерлитамак,

научн. рук. Акимов А.А.

канд. физ.-мат. наук доц.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ РИМАНА-АДАМАРА ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = u_{\xi\eta} + \frac{c}{4}u = 0, \quad (\Phi.1)$$

где c – произвольное действительное число, в области $\Delta = \{(\xi, \eta) \mid 0 < \alpha\xi < \eta < 1, \alpha > 1\}$.

Для данного уравнения поставим задачу Дарбу:

Задача D' . Найти в области Δ функцию $u(\xi, \eta)$, удовлетворяющую условиям

$$u(\xi, \eta) \in C(\bar{\Delta}) \cap C^1(\Delta \cup \{\eta = \alpha\xi\}), u_{\xi\eta} \in C(\Delta),$$

$$Lu(\xi, \eta) \equiv 0, (\xi, \eta) \in \Delta,$$

$$\eta = \xi \left. u(\xi, \eta) \right|_{\eta=\alpha\xi} = \tau(\xi), 0 \leq \xi \leq \frac{1}{\alpha},$$

$$u(\xi, \eta) \Big|_{\xi=0} = \psi(\eta), 0 \leq \eta \leq 1,$$

$$\psi(0) = \varphi(0).$$

Для решения задачи D' применим метод Римана-Адамара, который основан на так называемой функции Римана-Адамара. Ранее этот метод применялся в работах [1, с. 1023-1032; 2, с. 1 – 32.]. В этих работах была построена функция Римана-Адамара для области, ограниченной прямыми $\eta = \xi$, $\xi = 0$, $\eta = 1$. В представленной статье прямая $\eta = \xi$ заменена прямой $\eta = \alpha\xi$, что усложняет процесс построения функции

Функция Римана-Адамара задачи D' определяется следующим образом

$$R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = \begin{cases} R_1(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = J_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{c(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)} \right), & \eta > \alpha\xi_0; \\ R_2(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = J_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{c(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)} \right) - J_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{c(\alpha\xi - \eta_0) \left(\frac{\eta}{\alpha} - \xi_0 \right)} \right), & \eta < \alpha\xi_0. \end{cases}$$

где $J_0(\cdot)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

Функция $R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ обладает следующими свойствами:

1. $R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ как функция от (ξ, η) является решением сопряженного уравнения $L^* u = 0$, которое в данном случае является самосопряженным и, значит, совпадает с уравнением $Lu = 0$

2. $R_{1\xi} = 0$ на $\eta = \eta_0$.

3. $R_{1\eta} = 0$ на $\xi = \xi_0$.

4. $R_2 = 0$ на $\eta = \xi$.

5. $[R]_{\xi} = 0$ на $\eta = \alpha\xi_0$, где $[R] = \lim_{\xi \rightarrow 0} (R_1(\xi; \eta + \varepsilon; \xi_0; \eta_0) - R_2(\xi; \eta - \varepsilon; \xi_0; \eta_0))$

Введем следующие подобласти области Δ :

$$\Delta_1 = \{(\xi, \eta) | 0 < \xi < \xi_0, 0 < \eta < \eta_0\},$$

$$\Delta_2 = \{(\xi, \eta) | 0 < \eta < \xi < \xi_0, 0 < \eta < \eta_0\}.$$

Запишем тождество Грина для оператора L :

$$u \cdot LR - R \cdot Lu = \frac{1}{2} (uR_{\eta} - Ru_{\eta})_{\xi} + \frac{1}{2} (uR_{\xi} - Ru_{\xi})_{\eta}$$

Выполняя стандартную процедуру, состоящую в интегрировании тождества Грина по области $\Delta_1 \cup \Delta_2$ и применении формулы Гаусса-Остроградского, получим

$$0 = \int_{\partial(\Delta_1 \cup \Delta_2)} (uR_{\xi} - Ru_{\xi}) d\xi - (uR_{\eta} - Ru_{\eta}) d\eta = I_{ED} + I_{DC} + I_{CB} + I_{BA} + I_{AE},$$

Где $D = (\xi_0, \eta_0)$, $C = (0, \eta_0)$, $B = (0, \alpha\xi_0)$, $A = (0, 0)$, $E = (\xi_0, \alpha\xi_0)$

$$I_{ED} = uR_1 \Big|_E^D = uR_1(D) - uR_1(E) = u(\xi_0, \eta_0) - \tau(\xi_0)$$

$$I_{DC} = -uR_1 \Big|_D^C = -uR_1(C) + uR_1(D) = -\psi(\eta_0) + u(\xi_0, \eta_0)$$

$$I_{CB} = -uR_1 \Big|_C^B + \int_C^B uR_{1\eta} \Big|_{\xi=0} d\eta = -\psi(\alpha\xi_0) J_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{c\xi_0(\eta_0 - \alpha\xi_0)} \right) + \psi(\eta_0) - \frac{\sqrt{c\xi_0}}{4} \int_{\alpha\xi_0}^{\eta_0} \psi(\eta) \frac{J_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{c\xi_0(\eta_0 - \eta)} \right)}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} d\eta$$

$$I_{BA} = -uR_2 \Big|_B^A + \int_B^A uR_{2\eta} \Big|_{\xi=0} d\eta = \psi(\alpha\xi_0) \left[J_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{c\xi_0(\eta_0 - \alpha\xi_0)} \right) - 1 \right] -$$

$$- \frac{\sqrt{c\xi_0}}{4} \int_0^{\alpha\xi_0} \psi(\eta) \left[\frac{J_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{c\xi_0(\eta_0 - \eta)} \right)}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} - \frac{J_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{c\eta_0(\xi_0 - \frac{\eta}{\alpha}} \right)}{\sqrt{\alpha^2 \eta_0 - \alpha\eta}} \right] d\eta = \psi(\alpha\xi_0) \left[J_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{c\xi_0(\eta_0 - \alpha\xi_0)} \right) - 1 \right] -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sqrt{c\xi_0}}{4} \int_0^{\alpha\xi_0} \psi(\eta) \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c\xi_0(\eta_0-\eta)}\right)}{\sqrt{\eta_0-\eta}} d\eta + \frac{\sqrt{c\xi_0}}{4} \int_0^{\xi_0} \psi(\alpha\eta) \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c\eta_0(\xi_0-\eta)}\right)}{\sqrt{\eta_0-\eta}} d\eta \\
 I_{AE} = & \int_A^{\xi} u(R_{2\xi} d\xi - R_{2\eta} d\eta) \Big|_{\eta=\alpha\xi} = -\frac{1}{2} \int_0^{\xi_0} \tau(\xi) J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\xi-\xi_0)(\alpha\xi-\eta_0)}\right) \left[\sqrt{\frac{c(\alpha\xi-\eta_0)}{\xi-\xi_0}} - \alpha \sqrt{\frac{c(\xi-\xi_0)}{\alpha\xi-\eta_0}} \right] d\xi = \\
 & = \frac{c(\eta_0-\alpha\xi_0)}{2} \int_0^{\xi_0} \frac{\tau(\xi) J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\xi-\xi_0)(\alpha\xi-\eta_0)}\right)}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\alpha\xi-\eta_0)}} d\xi .
 \end{aligned}$$

Подставляя, полученные интегралы в формулу и, проводя дополнительные преобра

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta) = & \frac{1}{2} [\tau(\xi) + \psi(\alpha\xi)] - \frac{\sqrt{c\xi}}{8} \int_0^{\eta} \psi(t) \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c\xi(\eta-t)}\right)}{\sqrt{\eta-t}} dt + \frac{\sqrt{c\xi}}{8} \int_0^{\xi} \psi(\alpha t) \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c\eta(\xi-t)}\right)}{\sqrt{\eta-t}} dt + \\
 & - \frac{c(\eta-\alpha\xi)}{4} \int_0^{\xi} \tau(\xi) \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(t-\xi)(\alpha t-\eta)}\right)}{\sqrt{(t-\xi)(\alpha t-\eta)}} dt . \quad (\Phi.2)
 \end{aligned}$$

Теорема. Если функция $\tau(\xi) \in C^1\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$, $\alpha > 1$, а $\psi(\eta) \in C^2[0,1]$, то существует единственное решение задачи D' и оно определяется формулой (2).

Литература

1. Сабитов К.Б. Построение в явном виде решений задачи Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 1990. – Т.26. – №6. – с.1023-1032.
2. Gellerstedt S. Quelques problemes mixtes pour l'equation $y^m z_x + z_y = 0$ // Arkiv for Matematik, Astronomi o ch Fysik. – 1937. – 26A (3). – p.1 – 32.

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ РИМАНА-АДАМАРА ПРИ ОБРАЩЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \frac{\lambda \xi (\alpha - 1)}{2} \int_0^x \varphi(t) \frac{J_1(\sqrt{\lambda(t-x)(t-\alpha x)})}{\sqrt{(t-x)(t-\alpha x)}} dt = F(x), \tag{1}$$

где λ, α – некоторые числовые параметры, причем $\alpha > 1$. Поставим задачу обратить данное уравнение относительно функции $\varphi(x)$ в классе непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0, 1]$.

Предварительно поставим и решим задачу типа Дарбу для следующего уравнения:

$$Lu = u_{\xi\eta} + \lambda u = 0,$$

в области $\Delta = \{(\xi, \eta) | 0 < \alpha\xi < \eta < 1, \alpha > 1\}$.

Задача D' . Найти в области Δ функцию $u(\xi, \eta)$, удовлетворяющую условиям

$$u(\xi, \eta) \in C(\bar{\Delta}) \wedge C^1(\Delta \cup \{\eta = \alpha\xi\}), u_{\xi\eta} \in C(\Delta), Lu(\xi, \eta) \equiv 0, (\xi, \eta) \in \Delta,$$

$$u(\xi, \eta)|_{\eta=\alpha\xi} = \tau(\xi), 0 \leq \xi \leq \frac{1}{\alpha}, u(\xi, \eta)|_{\xi=0} = \psi(\eta), 0 \leq \eta \leq 1, \psi(0) = \varphi(0).$$

Для решения задачи D' применим метод Римана-Адамара, который основан на так называемой функции Римана-Адамара. В работах [1, с. 73], [2, с. 1] была построена функция Римана-Адамара для области, ограниченной прямыми $\eta = \xi, \xi = 0, \eta = 1$. В представленной статье прямая $\eta = \xi$ заменена прямой $\eta = \alpha\xi$, что усложняет процесс построения функции.

Функция Римана-Адамара задачи D' определяется следующим образом

$$R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = \begin{cases} R_1(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = J_0(\sqrt{\lambda(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}) & \eta > \alpha\xi_0; \\ R_2(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = J_0(\sqrt{\lambda(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}) - J_0\left(\sqrt{\lambda(\alpha\xi - \eta_0)\left(\frac{\eta}{\alpha} - \xi_0\right)}\right) & \eta < \alpha\xi_0. \end{cases}$$

где $J_0(\cdot)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

Функция $R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ обладает следующими свойствами:

1. $R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ как функция от (ξ, η) является решением сопряженного уравнения $L^* u = 0$, которое в данном случае является самосопряженным и, значит, совпадает с уравнением $Lu = 0$.

$$2. R_{1\xi} = 0 \text{ на } \eta = \eta_0; R_{1\xi} = 0 \text{ на } \xi = \xi_0; R_2 = 0 \text{ на } \eta = \xi.$$

$$3. [R]_{\xi} = 0, \text{ где } [R] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (R_1(\xi; \xi_0 + \varepsilon; \xi_0; \eta_0) - R_2(\xi; \xi_0 - \varepsilon; \xi_0; \eta_0)).$$

$$4. R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = 1.$$

Введем следующие подобласти области Δ :

$$\Delta_1 = \{(\xi, \eta) \mid 0 < \xi < \xi_0, 0 < \eta < \eta_0\},$$

$$\Delta_2 = \{(\xi, \eta) \mid 0 < \eta < \xi < \xi_0, 0 < \eta < \eta_0\}.$$

Запишем тождество Грина для оператора L :

$$0 = u \cdot LR - R \cdot Lu = \frac{1}{2} (uR_{\eta} - Ru_{\eta})_{\xi} + \frac{1}{2} (uR_{\xi} - Ru_{\xi})_{\eta}$$

Выполняя стандартную процедуру, состоящую в интегрировании тождества Грина по области $\Delta_1 \cup \Delta_2$ и применении формулы Гаусса-Остроградского, получим

$$0 = \int_{\partial(\Delta_1 \cup \Delta_2)} (uR_{\xi} - Ru_{\xi}) d\xi - (uR_{\eta} - Ru_{\eta}) d\eta = I_{ED} + I_{DC} + I_{CB} + I_{BA} + I_{AE} + I_{EB},$$

где $D = (\xi_0, \eta_0)$, $C = (0, \eta_0)$, $B = (0, \alpha\xi_0)$, $A = (0, 0)$, $E = (\xi_0, \alpha\xi_0)$.

Вычислим интегралы $I_{ED}, I_{DC}, I_{CB}, I_{BA}, I_{AE}$:

$$I_{ED} = uR_1|_E^D = uR_1(D) - uR_1(E) = u(\xi_0, \eta_0) - \tau(\xi_0)$$

$$I_{DC} = -uR_1|_D^C = -uR_1(C) + uR_1(D) = -\psi(\eta_0) + u(\xi_0, \eta_0)$$

$$I_{CB} = uR_1|_C^B - 2 \int_C^B uR_{1\eta} \Big|_{\xi=0} d\eta = \psi(\alpha\xi_0) J_1(\sqrt{\lambda\xi_0(\eta_0 - \alpha\xi_0)}) - \psi(\eta_0) + \sqrt{\lambda\xi_0} \int_{\alpha\xi_0}^{\eta_0} \psi(\eta) \frac{J_1(\sqrt{\lambda\xi_0(\eta_0 - \eta)})}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} d\eta$$

$$I_{BA} = uR_2|_B^A - 2 \int_B^A uR_{2\eta} \Big|_{\xi=0} d\eta = -\psi(\alpha\xi_0) [J_1(\sqrt{\lambda\xi_0(\eta_0 - \alpha\xi_0)}) - 1] +$$

$$+ \sqrt{\lambda\xi_0} \int_0^{\alpha\xi_0} \frac{J_1(\sqrt{\lambda\xi_0(\eta_0 - \eta)})}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} \psi(\eta) d\eta - \sqrt{\lambda\eta_0} \int_0^{\alpha\xi_0} \frac{J_1\left(\sqrt{\lambda\eta_0\left(\xi_0 - \frac{\eta}{\alpha}\right)}\right)}{\sqrt{\alpha^2\xi_0 - \alpha\eta}} \psi(\eta) d\eta = -\psi(\alpha\xi_0) [J_1(\sqrt{\lambda\xi_0(\eta_0 - \alpha\xi_0)}) - 1] +$$

$$+ \sqrt{\lambda\xi_0} \int_0^{\alpha\eta_0} \psi(\eta) \frac{J_1(\sqrt{\lambda\xi_0(\eta_0 - \eta)})}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} d\eta - \sqrt{\lambda\eta_0} \int_0^{\xi_0} \psi(\alpha\eta) \frac{J_1(\sqrt{\lambda\eta_0(\xi_0 - \eta)})}{\sqrt{\xi_0 - \eta}} d\eta.$$

$$I_{AE} = \int_A^E u(R_{2\xi} d\xi - R_{2\eta} d\eta) \Big|_{\eta=\alpha\xi} = - \int_0^{\xi_0} \tau(\xi) J_1(\sqrt{\lambda(\xi - \xi_0)(\alpha\xi - \eta_0)}) \left[\sqrt{\frac{\lambda(\alpha\xi - \eta_0)}{\xi - \xi_0}} - \alpha \sqrt{\frac{\lambda(\xi - \xi_0)}{\alpha\xi - \eta_0}} \right] d\xi =$$

$$= \lambda(\eta_0 - \alpha\xi_0) \int_0^{\xi_0} \frac{\tau(\xi) J_1(\sqrt{\lambda(\xi - \xi_0)(\alpha\xi - \eta_0)})}{\sqrt{(\xi - \xi_0)(\alpha\xi - \eta_0)}} d\xi.$$

$$I_{EB} = \psi(\alpha\xi_0) - \psi(\eta_0)$$

Подставляя полученные интегралы в формулу и проводя дополнительные преобразования, окончательно получим

$$u(\xi, \eta) = \tau(\xi) - \psi(\alpha\xi) + \psi(\eta) - \frac{\sqrt{c\xi}}{2} \int_0^\eta \psi(t) \frac{J_1(\sqrt{c\xi(\eta-t)})}{\sqrt{\eta-t}} dt + \frac{\sqrt{c\eta}}{2} \int_0^\xi \psi(\alpha t) \frac{J_1(\sqrt{c\eta(\xi-t)})}{\sqrt{\eta-t}} dt +$$

$$- \frac{c(\eta - \alpha\xi)}{2} \int_0^\xi \tau(t) \frac{J_1(\sqrt{c(t-\xi)(\alpha t - \eta)})}{\sqrt{(t-\xi)(\alpha t - \eta)}} dt .$$

(2)

Теорема 1. Если функция $\tau(\xi) \in \tilde{N}^1\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$, $\alpha > 1$, а $\psi(\eta) \in C^2[0,1]$,

то существует единственное решение задачи D' и оно определяется формулой (2).

В частном случае при $\alpha = 1$ решение задачи D' имеет вид

$$u(\xi, \eta) = \overline{\tau(\xi)} - \psi(\xi) + \psi(\eta) - \frac{\sqrt{\lambda\xi}}{2} \int_0^\eta \psi(t) \frac{J_1(\sqrt{\lambda\xi(\eta-t)})}{\sqrt{\eta-t}} dt + \frac{\sqrt{\lambda\eta}}{2} \int_0^\xi \psi(t) \frac{J_1(\sqrt{\lambda\eta(\xi-t)})}{\sqrt{\eta-t}} dt +$$

$$- \frac{\lambda(\eta - \xi)}{2} \int_0^\xi \overline{\tau(t)} \frac{J_1(\sqrt{\lambda(t-\xi)(t-\eta)})}{\sqrt{(t-\xi)(t-\eta)}} dt ,$$

(3)

где $u(\xi, \eta)|_{\eta=\xi} = \overline{\tau(\xi)}$, $0 \leq \xi \leq \frac{1}{\alpha}$.

Положим в (3) $\eta = \alpha\xi$

$$u(\xi, \alpha\xi) = \tau(\xi) - \psi(\xi) + \psi(\alpha\xi) - \frac{\sqrt{\lambda\xi}}{2} \int_0^{\alpha\xi} \psi(t) \frac{J_1(\sqrt{\lambda\xi(\alpha\xi-t)})}{\sqrt{\alpha\xi-t}} dt + \frac{\sqrt{\lambda\alpha\xi}}{2} \int_0^\xi \psi(t) \frac{J_1(\sqrt{\lambda\alpha\xi(\xi-t)})}{\sqrt{\alpha\xi-t}} dt +$$

$$- \frac{\lambda\xi(\alpha-1)}{2} \int_0^\xi \overline{\tau(t)} \frac{J_1(\sqrt{\lambda(t-\xi)(t-\alpha\xi)})}{\sqrt{(t-\xi)(t-\alpha\xi)}} dt .$$

$$\overline{\tau(\xi)} - \frac{\lambda\xi(\alpha-1)}{2} \int_0^\xi \overline{\tau(t)} \frac{J_1(\sqrt{\lambda(t-\xi)(t-\alpha\xi)})}{\sqrt{(t-\xi)(t-\alpha\xi)}} dt =$$

$$= \tau(\xi) + \psi(\xi) - \psi(\alpha\xi) - \frac{\sqrt{\lambda\alpha\xi}}{2} \int_0^\xi \psi(t) J_1(\sqrt{\lambda\alpha\xi(\xi-t)}) \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\xi-t}} - \frac{1}{\sqrt{\xi-t}} \right) dt .$$

Поставим задачу разрешить данное интегральное уравнение относительно функции $\overline{\tau(\xi)}$. Для этого достаточно положить в уравнении (2) $\eta = \xi$, считая, что

$$u(\xi, \xi) = \overline{\tau(\xi)}$$

$$u(\xi, \xi) = \overline{\tau(\xi)} = \tau(\xi) - \frac{\lambda \xi (1 - \alpha)}{2} \int_0^\xi \tau(t) \frac{J_1\left(\sqrt{\lambda(t-\xi)(\alpha t - \xi)}\right)}{\sqrt{(t-\xi)(\alpha t - \xi)}} dt - \\ - \psi(\alpha \xi) + \psi(\xi) + \frac{\sqrt{\lambda \xi}}{2} \int_0^\xi (\psi(\alpha t) - \psi(t)) \frac{J_1\left(\sqrt{\lambda \xi (\xi - t)}\right)}{\sqrt{\xi - t}} dt.$$

На основании полученного равенства решение уравнения (1) можно представить в виде

$$\varphi(x) = F(x) - \frac{\lambda x (1 - \alpha)}{2} \int_0^x F(t) \frac{J_1\left(\sqrt{\lambda(t-x)(\alpha t - x)}\right)}{\sqrt{(t-x)(\alpha t - x)}} dt \quad (4)$$

Теорема 2. Если функция $F(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$, $\alpha > 1$, то существует единственное решение уравнения (1) и оно определяется формулой (4).

Литература

1. Сабитов К. Б., Акимов А. А. К теории аналога задачи Неймана для уравнения смешанного типа // Известия ВУЗов. Математика. 2001 № 10. С. 73 – 80.
2. Gellerstedt S. Quelques problemes mixtes pour l'equation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. 26A (3). P. 1 – 32.
3. Акимов А. А. Задача Моравец для обобщенного уравнения Трикоми // Сибирские электронные математические известия. 2006. Т. 3. С. 71 – 82. <http://semr.math.nsc.ru>.
4. Акимов А. А. Об одной теореме единственности задачи Моравец // Альманах современной науки и образования. 2010. № 12. С. 67-69.

**ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО
УРАВНЕНИЯ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

Рассмотрим уравнение

$$Lu = u_{\xi\eta} + \frac{c}{4}u = 0 \quad (\text{формула 1})$$

Где $c = const$, в области $\Delta = \{(\xi, \eta) | 0 < \xi < \eta < \alpha\xi < 1, \alpha > 1\}$

Для данного уравнения поставим задачу Дарбу:

Задача . Найти в области Δ функцию $u(\xi, \eta)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(\xi, \eta) \in C(\bar{\Delta}) \wedge C^1(\Delta \cup \{\eta = \alpha\xi\}), u_{\xi\eta} \in C(\Delta), Lu(\xi, \eta) \equiv 0, (\xi, \eta) \in \Delta,$$

$$u(\xi, \eta)|_{\eta=\alpha\xi} = \tau(\xi), 0 \leq \xi \leq \frac{1}{\alpha},$$

$$u(\xi, \eta)|_{\eta=\xi} = \psi(\xi), 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$\psi(0) = \varphi(0)$$

Для решения задачи D' применим метод Римана-Адамара, который основан на так называемой функции Римана-Адамара. Ранее этот метод применялся в работах [1], [2],[3]. В частности, в работе [2] была построена функция Римана-Адамара для области, ограниченной прямыми $\eta = \xi, \xi = 0, \eta = 1$. В представленной статье характеристика уравнения $\xi = 0$ заменена прямой $\eta = \alpha\xi$, что значительно усложняет процесс построения функции.

Разобьем область Δ на следующие подобласти (в скобках указаны прямые, которые ограничивают указанные области:

$$\sigma_{2k}: \left\{ \eta = \alpha\xi, \xi = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \eta = \frac{\xi_0}{\alpha^k} \right\}, \sigma_{2k+1}: \left\{ \eta = \alpha\xi, \xi = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \eta = \frac{\xi_0}{\alpha^{k+1}} \right\},$$

$$\omega_0: \left\{ \eta = \eta_0, \xi = \xi_0, \eta = \xi_0, \xi = \frac{\eta_0}{\alpha} \right\}, \omega_{2k}: \left\{ \xi = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \xi = \frac{\xi_0}{\alpha^k}, \eta = \frac{\eta_0}{\alpha^k}, \eta = \frac{\xi_0}{\alpha^k} \right\},$$

$$\omega_{2k+1}: \left\{ \xi = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \xi = \frac{\xi_0}{\alpha^{k+1}}, \eta = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \eta = \frac{\xi_0}{\alpha^k} \right\}, \Delta_{2k}: \left\{ \eta = \xi, \xi = \frac{\xi_0}{\alpha^{k+1}}, \eta = \frac{\xi_0}{\alpha^k} \right\}$$

$$\Delta_{2k}: \left\{ \eta = \xi, \xi = \frac{\xi_0}{\alpha^k}, \eta = \frac{\eta_0}{\alpha^k} \right\}.$$

Построим в области Δ функцию Римана-Адамара, задав её в каждой из указанных областей, следующим образом:

1. $R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$, как функция от (ξ, η) является решением сопряженного уравнения $L^*u = 0$, которое в данном случае является самосопряженным и, значит, совпадает с уравнением $Lu = 0$.

$$2. R_{\xi} = 0 \text{ на } \eta = \eta_0; R_{\eta} = 0 \text{ на } \xi = \xi_0; R = 0 \text{ на } \eta = \xi \text{ и } \eta = \alpha\xi;$$

$$3. \frac{\partial [R_1]}{\partial \xi} = 0, \text{ где } [R_1] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (R(\xi; \frac{\xi_0}{\alpha^k} + \varepsilon; \xi_0; \eta_0) - R(\xi; \frac{\xi_0}{\alpha^k} - \varepsilon; \xi_0; \eta_0))$$

$$\frac{\partial [R_2]}{\partial \xi} = 0, \text{ где } [R_2] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (R(\xi; \frac{\eta_0}{\alpha^k} + \varepsilon; \xi_0; \eta_0) - R(\xi; \frac{\eta_0}{\alpha^k} - \varepsilon; \xi_0; \eta_0))$$

$$\frac{\partial [R_3]}{\partial \eta} = 0, \text{ где } [R_3] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (R(\xi; \frac{\xi_0}{\alpha^k} + \varepsilon; \eta; \xi_0; \eta_0) - R(\xi; \frac{\xi_0}{\alpha^k} - \varepsilon; \eta; \xi_0; \eta_0))$$

$$\frac{\partial [R_4]}{\partial \xi} = 0, \text{ где } [R_4] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (R(\xi; \frac{\xi_0}{\alpha^k} + \varepsilon; \xi; \xi_0; \eta_0) - R(\xi; \frac{\xi_0}{\alpha^k} - \varepsilon; \xi; \xi_0; \eta_0))$$

$$4. R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = 1.$$

Функция Римана-Адамара задачи определяется следующим образом:

$$R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = \begin{cases} R_{\omega_0} = J_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}\right), (\xi, \eta) \in \omega_0, \\ R_{\sigma_{2k}} = R_{\omega_{2k}} - J_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{c\left(\frac{\eta}{\alpha^{k+1}} - \xi_0\right)(\alpha^{k+1}\xi - \eta_0)}\right), (\xi, \eta) \in \sigma_{2k}, \\ R_{\sigma_{2k+1}} = R_{\omega_{2k+1}} - J_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\alpha^{k+1}\xi - \xi_0)\left(\frac{\eta}{\alpha^{k+1}} - \eta_0\right)}\right), (\xi, \eta) \in \sigma_{2k+1}, \\ R_{\Delta_{2k+1}} = R_{\omega_{2k+1}} - J_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\alpha^k\eta - \xi_0)\left(\frac{\xi}{\alpha^k} - \eta_0\right)}\right), (\xi, \eta) \in \Delta_{2k+1}, \\ R_{\Delta_{2k+2}} = R_{\omega_{2k+2}} - J_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\alpha^{k+1}\eta - \eta_0)\left(\frac{\xi}{\alpha^{k+1}} - \xi_0\right)}\right), (\xi, \eta) \in \Delta_{2k+2}, \\ R_{\omega_{2k+1}} = R_{\Delta_{2k+1}} - J_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\alpha^k\xi - \eta_0)\left(\frac{\eta}{\alpha^k} - \xi_0\right)}\right), (\xi, \eta) \in \omega_{2k+1}, \\ R_{\omega_{2k+2}} = R_{\Delta_{2k+2}} - J_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\alpha^{k+1}\xi - \xi_0)\left(\frac{\eta}{\alpha^{k+1}} - \eta_0\right)}\right), (\xi, \eta) \in \omega_{2k+2}. \end{cases}$$

где $J_0(*)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

Запишем тождество Грина для оператора L :

$$u \cdot LR - R \cdot Lu = \frac{1}{2}(uR_{\eta} - Ru_{\eta})_{\xi} + \frac{1}{2}(uR_{\xi} - Ru_{\xi})_{\eta}$$

Выполняя стандартную процедуру, состоящую в интегрировании тождества Грина по области $\Delta_1 \cup \Delta_2$ и применении формулы Гаусса-Остроградского, получим:

$$0 = \int_{\partial(\Delta_1 \cup \Delta_2)} (uR_\xi - Ru_\xi) d\xi - (uR_\eta - Ru_\eta) d\eta = I_{DC} + I_{ED} + I_{CB} + I_{BA} + I_{AE}$$

$$D = (\xi_0, \eta_0), C = \left(\frac{\eta_0}{\alpha}, \eta_0\right), B = \left(\frac{\xi_0}{\alpha}, \xi_0\right), A = (0,0), E = (\xi_0, \xi_0).$$

Вычислим интегралы $I_{ED}, I_{DC}, I_{CB}, I_{BA}, I_{AE}$:

$$\begin{aligned} I_{AC} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}} u(R_\xi d\xi - R_\eta d\eta) + \int_0^{\frac{\xi_0}{\alpha^n}} u(R_\xi d\xi - R_\eta d\eta) \right) |_{\eta=\alpha\xi} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\eta_0 - \alpha^{2n+1}\xi_0)}{2} \int_0^{\frac{\xi_0}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\alpha^{n+1}\xi - \xi_0)}\left(\frac{\xi}{\alpha^n} - \eta_0\right)\right)}{\sqrt{(\alpha^n\xi - \alpha^{2n}\xi_0)(\alpha^{n+1}\xi - \eta_0)}} \tau(\xi) d\xi + \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\alpha^{2n+1}\eta_0 - \xi_0)}{2} \int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\alpha^{n+1}\xi - \eta_0)}\left(\frac{\xi}{\alpha^n} - \xi_0\right)\right)}{\sqrt{(\alpha^n\xi - \alpha^{2n}\eta_0)(\alpha^{n+1}\xi - \xi_0)}} \tau(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$I_{ED} = uR_1|_E^D = uR_1(D) - uR_1(E) = u(\xi_0, \eta_0) - \tau(\xi_0)$$

$$I_{DC} = -uR_1|_D^C = -uR_1(C) - uR_1(D) = -\psi\left(\frac{\eta_0}{\alpha}\right) + u(\xi_0, \eta_0)$$

$$\begin{aligned} I_{AE} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}} u(R_\xi d\xi - R_\eta d\eta) + \int_0^{\frac{\xi_0}{\alpha^n}} u(R_\xi d\xi - R_\eta d\eta) \right) |_{\eta=\xi} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\eta_0 - \alpha^{2n}\xi_0)}{2} \int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\alpha^n\xi - \xi_0)}\left(\frac{\xi}{\alpha^n} - \eta_0\right)\right)}{\sqrt{(\alpha^n\xi - \alpha^{2n}\xi_0)(\alpha^n\xi - \eta_0)}} \psi(\xi) d\xi \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\alpha^{2n+1}\eta_0 - \xi_0)}{2} \int_0^{\frac{\xi_0}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\alpha^{n+1}\xi - \xi_0)}\left(\frac{\xi}{\alpha^n} - \eta_0\right)\right)}{\sqrt{(\alpha^n\xi - \alpha^{2n}\xi_0)(\alpha^{n+1}\xi - \eta_0)}} \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Подставляя, полученные интегралы в формулу и, проводя дополнительные преобразования, окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta) = & \tau(\xi) + \psi\left(\frac{\eta}{\alpha}\right) - \frac{c(\eta - \xi)}{4} \int_0^{\xi} \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(t - \xi)(t - \eta)}\right)}{\sqrt{(t - \xi)(t - \eta)}} \tau(t) dt \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\eta - \alpha^{2n+1}\xi)}{4} \int_0^{\frac{\xi}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\alpha^{n+1}t - \xi)\left(\frac{t}{\alpha^n} - \eta\right)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n t - \alpha^{2n}\xi)(\alpha^{n+1}t - \eta)}} \tau(t) dt \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\alpha^{2n+1}\eta - \xi)}{4} \int_0^{\frac{\eta}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\alpha^{n+1}t - \eta)\left(\frac{t}{\alpha^n} - \xi\right)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n t - \alpha^{2n}\eta)(\alpha^{n+1}t - \xi)}} \tau(t) dt \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\alpha^{2n+1}\eta - \xi)}{4} \int_0^{\frac{\eta}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{c(\alpha^{n+1}t - \xi)\left(\frac{t}{\alpha^n} - \eta\right)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n t - \alpha^{2n}\xi)(\alpha^{n+1}t - \eta)}} \psi(t) dt.
 \end{aligned}$$

(формула 2)

Теорема. Если функция $\tau(\xi) \in C^1\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$, $\alpha > 1$, $\psi(\xi) \in C^2[0, 1]$, то существует единственное решение задачи и оно определяется формулой (Ф.2).

Литература

1. Сабитов К. Б., Акимов А. А. К теории аналога задачи Неймана для уравнения смешанного типа / Известия ВУЗов. Математика. – 2001, - № 10. - С. 73 – 80.
2. Gellerstedt S. Quelques problemes mixtes pour l'equation $y^m z_x + z_y = 0$ // Arkiv for Matematik, Astronomi o ch Fysik. – 1937. – 26A (3)., P. 1 – 32.
3. Акимов А. А. Задача Моравец для обобщенного уравнения Трикоми // Сибирские электронные математические известия. 2006. – Т. 3. – С. 71 – 82. – [http:// semr.math.nsc.ru](http://semr.math.nsc.ru).

Доровская М.С.

Магистр 1 курса
специальность прикладная математика и информатика
физико-математический факультет
СФ БашГУ, Россия

Научный руководитель

Хасанов М.К.

Кандидат физико-математических наук, доцент
преподаватель кафедры прикладной математики и механики
физико-математического факультета, СФ БашГУ, Россия

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНЖЕКЦИИ ГАЗА В ПЛАСТ, ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫЙ ВОДОЙ

Аннотация. В данной работе исследуется математическая модель образования газогидрата в результате нагнетания газа в природный пласт, насыщенный газом и водой.

Ключевые слова: газовые гидраты, пористая среда, фильтрация, проницаемость, газ, гидратообразование.

Keywords: gas hydrates, porous media, filtration, permeability, gas hydrate formation.

В настоящее время наблюдается значительный интерес к изучению течений в пористых средах, сопровождающихся фазовыми переходами, что объясняется необходимостью в теоретическом осмыслении и системном исследовании большого круга проблем, возникающих, в частности, при решении вопросов разведки и добычи углеводородного сырья, при реализации новых и совершенствовании существующих методов повышения отдачи нефте- и газонасыщенных пластов [1].

В данной работе исследуется математическая модель образования газогидрата в результате нагнетания газа в природный пласт, насыщенный газом и водой. Предполагается, что полубесконечный пористый пласт в начальный момент времени насыщен газом и водой, давление и температура которых в исходном состоянии соответствуют термодинамическим условиям существования их в свободном состоянии. Через границу пласта закачивается такой же газ, причем его давление и температура соответствуют условиям образования газогидрата и поддерживаются на границе области постоянными. При постановке данной задачи полагается, что в результате закачки газа образуется три характерные области: ближняя, где поры заполнены газом и гидратом, промежуточная, в которой газ, вода и гидрат находятся в равновесии, и дальняя, которая заполнена газом и водой. В промежуточной зоне происходит образование гидрата.

Система основных уравнений, представляющая собой законы сохранения масс, энергии и закон Дарси, при допущениях о несжимаемости и неподвижности скелета пористой среды, гидрата и воды, а также пренебрежении баротермическим

эффектом имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g m S_g + \rho_h m S_h G) + \text{div}(\rho_g m S_g \vec{v}_g) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \rho_l S_l + m(1-G)\rho_h S_h) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) + \rho_g c_g m S_g \vec{v}_g \text{grad} T = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \frac{\partial}{\partial t}(m \rho_h S_h L_h),$$

$$m S_g \vec{v}_g = -\frac{k_g}{\mu_g} \text{grad} p,$$

где m – пористость; G – массовая концентрация газа в гидрате; ρ_j и S_j ($j = sk, h, l, g$) – истинные плотности и насыщенности пор j -ой фазы; v_g, k_g, c_g и μ_g – соответственно скорость, проницаемость, удельная теплоемкость и динамическая вязкость газовой фазы; p – давление; T – температура; L_h – удельная теплота гидратообразования; $\rho \tilde{\eta}$ и λ – удельная объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности системы; индексы sk, h, l и g относятся к параметрам скелета, гидрата, воды и газа соответственно.

В работе получены решения, описывающие распределения основных параметров в каждой из трех областей пласта. В результате анализа полученных рданных установлены основные закономерности образования газогидратов в пористых пластах в зависимости от давления, температуры и водонасыщенности пласта, а также в зависимости от интенсивности закачки газа. Показано, что образование газогидрата может происходить как на фронтальной поверхности, так и в протяженной области. Получены критические условия, разделяющие эти два режима образования газогидрата. Установлено, что протяженность объемной области увеличивается с ростом давления, под которым нагнетается газ и величины проницаемости пласта, а температура этой области вследствие выделяющегося при гидратообразовании тепла поднимается выше исходной температуры пласта даже при подаче холодного газа.

Литература

1. Хасанов М. К. Гималтдинов И. К., Столповский М. В. Особенности образования газогидратов при нагнетании холодного газа в пористую среду, насыщенную газом и водой // Теоретические основы химической технологии. – 2010. – Т. 44, № 4. – С. 442–449
2. Шагапов В. Ш., Хасанов М. К. Мусакаев Н. Г. Образование газогидрата в пористом резервуаре, частично насыщенном водой, при инъекции холодного газа // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т 49, № 3. – С.137–150.



Белошопка А.О.

Инженер научно-технического отдела института керамического машино-
строения



Белошопка О.Я.

Старший преподаватель кафедры физики ДДПУ

ДІЯ АБРАЗИВНИХ ЧАСТОК НА ПОВЕРХНЮ МОНОКРИСТАЛА У ПРОЦЕСІ ХІМІКО-МЕХАНІЧНОГО ПОЛІРУВАННЯ

Щоб запобігти браку, вирізана зі зливка кристалічна заготовка інтегральної мікросхеми має бути ретельно відполірована з мінімальними порушеннями кристалічної структури. Тому вивчення процесу взаємодії абразивного зерна і поверхнево-активних речовин (ПАР), що застосовуються при хіміко-механічному поліруванні (ХМП), набуває першорядного значення [4, с. 1154-1158]. Проблеми з'ясування мікромеханізмів пластичності і руйнування приділяється багато уваги [2, с. 514-518]. Наша робота присвячена дослідженню мікромеханізмів пластичності і руйнування напівпровідникових кристалів типу A_3B_5 з метою оптимізації режимів

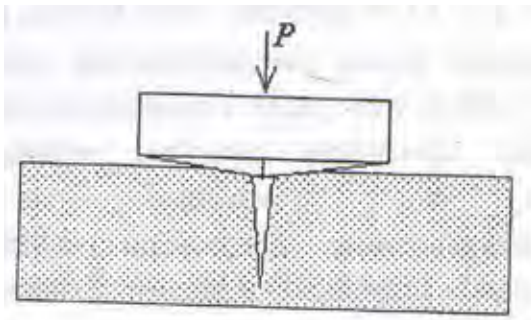


Рис. 1

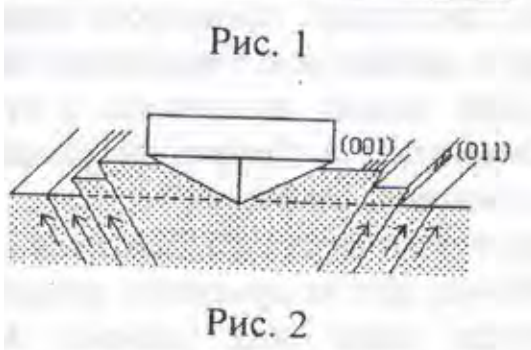


Рис. 2

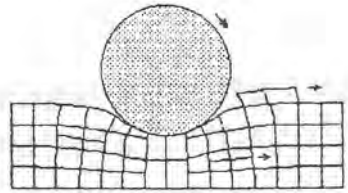


Рис. 3

ХМП.

Слід розрізняти попереднє, грубе полірування й остаточне, тонке полірування – доведення. При грубом поліруванні з оброблюваної поверхні знімаються грубі неоднорідності (горбочки). Застосування крупних абразивних зерен і ПАР з великою хімічною активністю із прикладенням до абразивного зерна значних механічних навантажень дозволяє зробити це досить швидко [3, с. 118].

У процесі експериментального дослідження дія абразивного зерна на поверхню кристала моделюється дією індентора – чотиригранної алмазної піраміди Віккерса з кутом при вершині 136° [1, с. 28-29]. На рис. 1 показана схема розвитку тріщин при індентуванні гострим індентором, а на рис. 2 – схема східчастого підняття поверхні кристала під індентором, яке супроводжується виникненням крайових дислокацій.

При вдавлюванні абразивного зерна, яке не супроводжується тріщиноутворенням, відбувається спотворення кристалічної решітки. Якщо тиск на абразивне зерно посилюється, у кристалі генеруються пари додатних і від'ємних крайових дислокацій, як це показано на рис. 3. Острівці від'ємних **дислокацій локалізуються під абразивним зерном, острівці додатних локацій відходять у боки.**

Мікронеоднорідності (горбочки) на поверхні кристала розбиваються абра-

зивними зернами на острівці. При перекочуванні абразивного зерна по грані кристала острівці додатних дислокацій проштовхуються як уздовж поверхні, так і в об'ємі з подальшим виходом із стала через

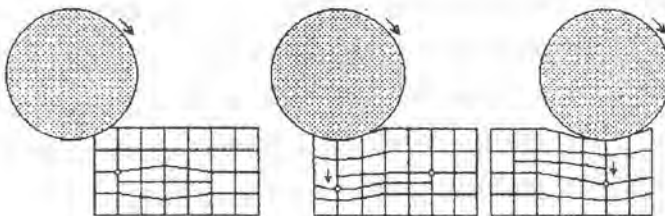


Рис. 4

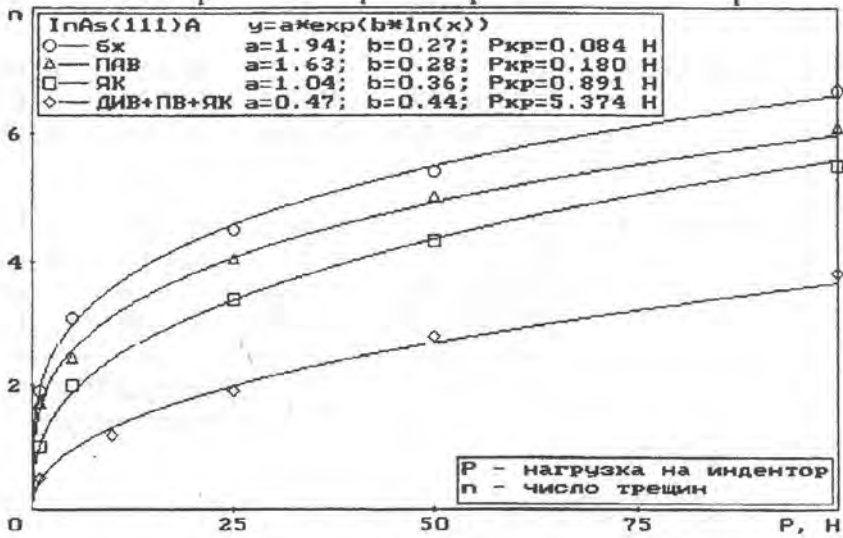


Рис. 5

але не суміжних площинах, притягуються, намагаючись міститися одна над одною. Між сусідніми різнойменними дислокаціями такої структури виникають сили притягання. Таким ом, у кристалі постійно діє механізм самозаліковування дислокацій.

Роздрібнення дислокацій абразивними зернами й освітлення кристалу прискорює процес самозаліковування.

Пластини монокристалів GaAs, InAs, InP, орієнтовані у площинах (111), (100), досліджувалися в інтервалі навантажень 0,2 ... 1 мН при глибині вдвлювання 0,1 ... 1,2 мкм. За 60 с перед заглибленням індентора на поверхню зразка наносився розчин ПАР.

Мікрокрихкість визначалася за середнім числом n тріщин, що виникали на поверхні кристала при заглибленні індентора. На рис. 5 наведена експериментальна залежність числа тріщин n в InAs від навантаження P на індентор у присутності різних ПАР.

У роботі використовувалися такі ПАР:

без рідини (бж);

0,1% водний розчин ПАР розробленого заводом напівпровідникових приладів «Платан», м. Фрязіно, Росія (ПАР);

5% водний розчин янтарної кислоти (ЯК);

10 мл дистильованої води + 4 мл перекису водню + 6 мл насиченого розчину янтарної кислоти (ДИВ+ПВ+ЯК).

Залежність апроксимується за методом найменших квадратів експонентою $n = aP^b$. У табл. 1 наведені розраховані значення коефіцієнтів апроксимуючої функції, отримані в результаті математичної обробки експериментальних даних для різних кристалів. Крім перелічених використовувалися ще такі ПАР:

10 мл дистильованої води + 2 мл 30% розчину вуглекислого амонію + 5 мл перекису водню (ДИВ+УА+ПВ);

Таблиця 1

Кристалл	Жидкость	a	b	Ркр, Н
InAs (111)A	бж	1.937	0.267	0.084
	ПАВ	1.626	0.283	0.180
	ЯК	1.043	0.365	0.891
	ДИВ+ПВ+ЯК	0.475	0.443	5.374
GaAs (100)	бж	3.133	0.219	0.005
	ДИВ+УА+ПВ	2.727	0.234	0.014
	ДИВ+ПВ+ЯК	2.104	0.256	0.055
InP (111)B	бж	1.113	0.351	0.736
	ЯК	0.779	0.415	1.826
	ДИВ+ПВ+ЯК	0.364	0.534	6.642
	ДИВ+ККС+ЙА	0.287	0.500	11.670

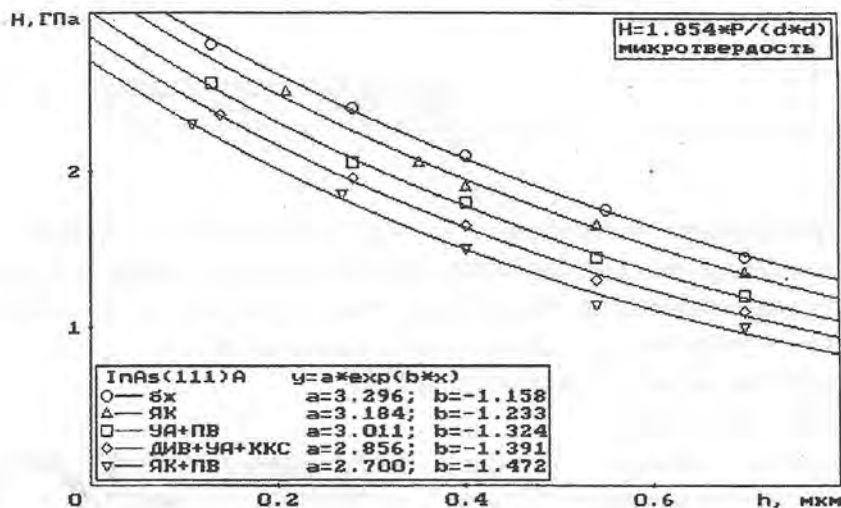


Рис. 6

100 мл дистильованої води + 5 г червоної кров'яної солі + 5 г йодистого амонію (ДИВ+ККС+ЙА).

На рис. 6 показана залежність середнього значення H микротвердості поверхні кристала InAs у серії експериментів від глибини h заглиблення індентора. Микротвердість за Віккерсом $H_i = 1,854P/d^2$, де P – навантаження на піраміду Віккерса, d – діагональ відбитка піраміди в поверхневому шарі досліджуваного матеріалу.

Середнє значення микротвердості $H = \sum_{i=1}^k H_i/k$. Залежність апроксимується за методом найменших квадратів експонентою $H = a \exp(bh)$. Оцінка

стандартного відхилення середнього значення

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^k (H_i - H) / [k(k - 1)]}$$

Коефіцієнт варіації мікротвердості $\gamma = S/H$. На рис. 7 показана залежність коефіцієнта варіації % мікротвердості Y від глибини h заглиблення індентора. Залежність апроксимується за методом найменших квадратів експонентою.

В експериментах, результати яких показані на рис. 6 і рис. 7, використовувалися такі ПАР:

2,4% водний розчин янтарної кислоти (ЯК);

2,4% водний розчин янтарної кислоти + 20% перекису водню (ЯК+ПВ);

4,2% водний розчин вуглекислого амонію + 29,4% перекису водню (УА+ПВ);

100 мл дистильованої води + 30 г вуглекислого амонію + 6 г червоної кров'яної солі (ДИВ+УА+ККС);

без рідини (бж).

У табл. 2 наведені розраховані значення коефіцієнтів апроксимуючих функцій $H = a \exp(bh)$ і $\chi = a \exp(bh)$ для кристалів $InAs, InSb, GaAs$.

Наведені в табл. 1 значення коефіцієнтів функції $n = aR^h$ дозволяють знайти критичні значення навантаження P на індентор, при перевищенні якого режим м'якого полірування (без тріщиноутворення) переходить у режим жорсткого полірування: $P_{кр} = a^{-1/h}$. Критичні

значення $P_{кр}$ навантаження на індентор наведені в табл. 1. У всіх випадках у присутності ПАР, які містять перекис водню та вуглекислого амонію, тобто компоненти, що виділяють газ, мікротріщин зменшується. Це пояснюється тим, що поверхневі дислокації-зародки мікротріщин усуваються хімічним травником. Таким чином, додавання ПАР до складу суспензії при ХМП дозволяє підвищити поріг крихкого руйнування і збільшити швидкість полірування. Найбільшу ефективність в описаному експерименті показала додача 10 мл дистильованої води + 4 мл перекису водню + 6 мл насиченого розчину янтарної кислоти (ДИВ+ПВ+ЯК).

Як це видно з графіків рис. 6, мікротвердість Y знижується зі збільшенням глибини h заглиблення індентора. Це пояснюється тим, що в поверхневому шарі більше лінійних дислокацій, які гальмують ступінчастий зсув кристалічних шарів (див. рис. 2). ПАР, розчиняючи дислокації, що виходять на поверхню, знижує мікротвердість Y . Таким чином, графіки рис. 6 підтверджують роль ПАР у заліковуванні дислокацій у процесі тонкого полірування. У дослідях з $InAs$ найкращі результати показала суміш із 100 мл дистильованої води + 30 г вуглекислого амонію + 6 г червоної кров'яної солі (ДИВ+УА+ККС).

На графіках рис. 7 спостерігається зниження коефіцієнта варіації χ мікротвердості H як із збільшенням глибини h заглиблення індентора, так і з додачею ПАР. Це підтверджує припущення про те, що хід залежності $H(h)$ пояснюється витравленням лінійних дислокацій і 'атомів домішки [5, с. 1154-1158]. Число поверхневих неоднорідностей під індентором порівняно невелике і має випадковий характер, що збільшує діапазон значень мікротвердості H .

Наведені у табл. 1 і табл. 2 значення коефіцієнтів апроксимуючих функцій

$H = a \exp(bh)$ і $\chi = a \exp(bh)$ дозволяють обґрунтовано вибрати режим ХМП (розмір абразивного зерна, навантаження на абразивне зерно, склад ПАВ), який забезпечує задані параметри поверхні кристала при максимальній швидкості процесу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бульбчев С.И., Алехин В.П. Испытание материалов непрерывным вдавливанием индентора. – М.: Машиностроение, 1990. -224 с.
2. Конева Н.А., Козлов З.В. Современная картина стадий пластической деформации: Докл. [3 Международная конференция «Микромеханизмы пластичности, разрушения и сопутствующих явлений» (MPFP) на базе 41 Международного семинара «Актуальные проблемы прочности», Тамбов, 23-27 июня, 2003] // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. естеств. и техн. н. – 2003. – 8. -№ 4. – С. 514-518.
3. Обработка полупроводниковых материалов/ Карбань В.И., Кой П., Рогов В.В., Хофман Х. и др.; Под ред. Новикова Н.В., Бертольди В. – К.: Наук.думка, 1982. – 264 с.
4. Mototaro Sato. Ultra-High-Precision Surface Finishing Technology// Techno Japan Vol.19 – No.1, Jan. 1986. – P. 87-96.
5. Sun Keun Choi, Minoru Mihara. Impurity Effects on the Dislocation Velocity in Gallium Arsenide// J. Phys. Soc. Japan 32 (1972). -P. 1154-1158.

Проанализирован механизм химико-механического полирования (ХМП) монокристаллов полупроводников типа АЗВ5 с использованием поверхностно-активных веществ (ПАВ). Результаты экспериментальных исследований позволяют обоснованно выбирать режим ХМП (размер абразивного зерна, нагрузку на абразивное зерно, состав ПАВ), обеспечивающий заданные параметры поверхности кристалла при максимальной скорости процесса.

Доровская М.С.

Магистр 1 курса
специальность прикладная математика и информатика
физико-математический факультет
СФ БашГУ, Россия

Научный руководитель

Хасанов М.К.

Кандидат физико-математических наук, доцент
преподаватель кафедры прикладной математики и механики
физико-математического факультета, СФ БашГУ, Россия

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗЛОЖЕНИЯ ГАЗОГИДРАТА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Аннотация. В работе рассматривается математическая модель разложения газогидрата в результате отбора газа из природного пласта, насыщенного газом и гидратом.

Ключевые слова: газовые гидраты, пористая среда, разложение, проницаемость, газ.

Keywords: gas hydrates, porous medium, expansion, permeability, gas.

Предположение о возможности существования газогидратов в газоносных пластах было высказано И.Н. Стрижовым в 1946 г., однако никаких доказательств он не привел. Более того, он высказал пессимизм относительно целесообразности их освоения. В 1963 г., была также высказана идея о существовании газогидратных скоплений в охлажденных пластах. Тогда реальность этой идеи у многих вызывала сомнения. Требовались доказательства возможности образования гидратов в пористых средах и формирования газогидратных залежей.[2]

Природные залежи газовых гидратов – веществ, представляющих собой соединения воды и газа, открыты сибирскими геологами. За последние 30 лет выяснилось, что газа в них в расчете на количество органического углерода больше, чем в обычном газе, угле и нефти, вместе взятых. Гидраты газов обнаружены не только в районах распространения вечной мерзлоты. Огромные запасы гидратов, по данным, сосредоточены в прибрежных районах Тихого океана и на дне Мирового океана. К сегодняшнему дню месторождения газовых гидратов найдены на континентальных шельфах всех шести материков. Естественно, встал вопрос о возможности добычи газа из такого уникального и богатого источника.

К настоящему моменту отсутствует полное понимание картины физических процессов, сопровождающих диссоциацию газовых гидратов в пористой среде и необходимое для разработки газогидратных месторождений. Это в первую очередь объясняется значительными трудностями, которые возникают как при математическом моделировании данных процессов, так и их экспериментальном исследовании [1].

В данной работе исследуется математическая модель разложения газогидрата в результате отбора газа из природного пласта, насыщенного газом и гидратом. Предполагается, что пористый пласт в начальный момент времени насыщен газом и гидратом, давление и температура которых в исходном состоянии соответствуют термодинамическим условиям существования их в свободном состоянии. В пласте пробурена скважина, через которую откачивается газ. Стенки скважины негерметичны (т.е. проницаемы для продуктов разложения), но будем считать, что вода неподвижна, а газ подвижен. При постановке данной задачи предполагается, что в результате отбора газа образуется три характерные области: ближняя, где поры заполнены газом и водой, промежуточная, в которой газ, вода и гидрат находятся в равновесии, и дальняя, которая заполнена газом и гидратом. В промежуточной зоне происходит диссоциация гидрата.

Система основных уравнений, описывающая процесс разложения газовых гидратов в пористых средах представляет собой законы сохранения масс, энергии и закон Дарси. Данная система уравнений дополняется зависимостью коэффициента проницаемости для газа от газонасыщенности и условием равновесия фаз в зоне фазовых переходов

В работе получены решения, описывающие распределения основных параметров в каждой из трех областей пласта. В результате анализа полученных решений установлены основные закономерности разложения газогидратов в пористых пластах в зависимости от давления, температуры и гидратонасыщенности пласта, а также в зависимости от интенсивности отбора газа. Показано, что разложение газогидрата может происходить как на фронтальной поверхности, так и в протяженной области. Получены критические условия, разделяющие эти два режима разложения газогидрата. Установлено, что для величины массового расхода отбора газа, существует некоторое предельное значение, зависящее, прежде всего от проницаемости и исходной температуры, выше которого необходимо рассматривать объемную область разложения гидрата

Литература

1. Гималтдинов И.К., Мусакаев Н.Г., Хасанов М.К., Столповский М.В. Особенности разложения газовых гидратов при тепловом и депрессионном воздействиях в пластах конечной протяженности // Вестник Тюменского государственного университета. – 2011.– №7. – С. 6 – 13.
2. Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Гималтдинов И.К., Столповский М.В. Особенности разложения газовых гидратов в пористых средах при нагнетании теплого газа // Теплофизика и аэромеханика. – 2013. – Т. 20, № 3. – С. 347-354.